

Diszkrét matematika II

definíciók, tételek, állítások.

(Készítette: Huzynets Erik, 2011.05.28. Miskolci Egyetem)

Def (Boole függvény)

Egy $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ függvényt Boole függvénynek nevezünk, ha $A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in A\}$.

Minden Boole függvény képlettel felírható polinom alakban.

Def. . Egy $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ n változós Boole függvényről azt mondjuk, hogy

1. 0-örző, ha $f(0,0,\dots,0) = 0$ (2^7 db van)
2. 1-örző, ha $f(1,1,\dots,1) = 1$ (2^7 db van)
3. monoton, ha $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, \dots, x_n \leq y_n$ esetén $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n)$
4. lineáris, ha $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_j + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$
5. önduális, ha $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ minden $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$

Def (klón)

Egy $\mathcal{C} \subseteq O_A$ részhalmazról azt mondjuk, hogy klón, ha:

- Minden A-n értelmezett projektív $\mathcal{C}$ -ben van, azaz $e_i^{(n)} \in \mathcal{C}$ $1 \leq i \leq n$
- $\mathcal{C}$ zárt a függvénykompozícióra nézve

Így lehet klónokat kapni

Állítás. $Pol(\xi) \leq O_A$ egy klón.

Állítás. Ha minden $i \in I$ -re $\mathcal{C}_i$ egy klón az A-n akkor $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ is klón.

Állítás. Ha R az A-n értelmezett relációknak egy családja, akkor $Pol(R)$ is egy klón. ($Pol(R) = \bigcap_{\xi \in R} Pol(\xi)$)

Állítás. $P_0, P_1, M, L, D \subseteq O_{\{0,1\}}$ részhalmazok klónok.

Állítás. Minden $\mathcal{C}$ klón zárt a fiktív változók bevezetésére.

Állítás. Minden $\mathcal{C}$ klón zárt a változók azonosítására nézve.

Tétel (Klónok elméletének főtétele (E.Post))

Ha $\mathcal{C}$ egy olyan klón, amelyre $\mathcal{C} \not\subseteq P_0$, $\mathcal{C} \not\subseteq P_1$, $\mathcal{C} \not\subseteq M$, $\mathcal{C} \not\subseteq D$, $\mathcal{C} \not\subseteq L$, akkor $\mathcal{C} = O_{\{0,1\}}$.

Állítás. Ha $\mathcal{C}$ egy olyan klón, amelyre: $I_1, I_2, U_2 \in \mathcal{C}$, akkor $\mathcal{C} = O_{\{0,1\}}$.

Állítás. Ha $\mathcal{C}$ egy olyan klón, amelyre: $negáció, \cup, \cap \in \mathcal{C}$, akkor $\mathcal{C} = O_{\{0,1\}}$.

Állítás. Ha $\mathcal{C}$ egy olyan klón, amelyre: $negáció, \cup \in \mathcal{C}$, akkor $\mathcal{C} = O_{\{0,1\}}$.

Megjegyzés. A kétváltozós nem lineáris függvények közül nincs önduális.

Def (gráf)

Egy $\Gamma = (V, E)$ rendezett párt egyszerű gráfnak nevezzük, ha E-nek bármely eleme a V-nek egy kételemű részhalmaza. Itt a V halmazt nevezzük a csúcsok halmazának és az E halmazt az élek halmazának.

Állítás. $2|E| = d(1) + d(2) + \dots + d(n) = \sum_{i \in V} d(i)$

Def (Kör)

A $G=(V,E)$ gráfban az $(i_1, e_1, i_2, e_2, i_3, e_3, \dots, i_k, e_k, i_{k+1})$ csatlakozó élsorozatot körnek nevezzük, ha $i_1, i_2, \dots, i_k \in V$ csúcsok különböznek és $i_{k+1}=i_1$.

Def (séta)

Egy $\Gamma=(V,E)$ gráfban k -hosszúságú sétának nevezünk egy sorozatot, ha $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k \in V$ és $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ továbbá $e_1 = \{v_0, v_1\}$, $e_2 = \{v_1, v_2\}$ és $e_k = \{v_{k-1}, v_k\}$.

Def (út)

Egy sétát a gráfban útnak nevezünk, ha nem ismétlődnek benne a csúcsok.

Def (Euler út vagy kör)

Legyen $G=(V,E,v)$ egy gráf, amelyben az élek száma m .

Az E -beli éleknek egy $e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, e_{\pi(3)}, \dots, e_{\pi(m)}$ permutációját Euler-féle útnak nevezzük, ha létezik a csúcsoknak egy olyan $i_1, i_2, \dots, i_m \in V$ sorozata, amelyre $v(e_{\pi(m)}) = (i_{m-1}, i_m)$ és $i \neq i_m$

Ha $i_1 = i_m$ akkor Euler-féle körrel beszélünk.

Def (erdő)

Egy $\Gamma=(V,E)$ gráfot erdőnek nevezünk, ha Γ -ban nincs kör. Ha egy erdő összefüggő akkor fának nevezzük.

Állítás. Ha $\Gamma=(V,E)$ egy fa és $|V| \geq 2$ akkor léteznek olyan $i, j \in V$ csúcsok, amelyekre $i \neq j$ és $d(i) = d(j) = 1$

Állítás. Ha $\Gamma=(V,E)$ egy fa, akkor $|E| = |V| - 1$.

Állítás. Ha $\Gamma=(V,E)$ egy erdő, amiben m db fa van, akkor $|E| = |V| - m$.

Def (faváz)

Egy $\Gamma=(V,E)$ gráfban az éleknek az $F \subseteq E$ részhalmazát faváznak nevezzük, ha (V, F) egy fa. $|F| = |V| - 1$.

Def (súly függvény)

Ha $\Gamma=(V,E)$ gráf, akkor egy $s: E \rightarrow R_+$ függvényt súly függvénynek nevezzük.

Def (bekerülési költség)

Ha $\Gamma=(V,E)$ egy gráf, $F \subseteq E$ egy faváz és $s: E \rightarrow R_+$ egy költség függvény, akkor F bekerülési költségén a $G(F) = \sum_{e \in F} s(e) > 0$.

Mohó algoritmus (greedy algorithm)

Legyen $\Gamma=(V,E)$ egy összefüggő gráf és $s: E \rightarrow R_+$ költségfüggvény.

1. lépés

Kiválasztjuk (E -ben) a legkisebb költségű élek egyikét: $e_1 \in E$ és $s(e_1) \leq s(e)$ minden $e \in E$ éltre.

2. lépés

Ha már kiválasztottuk az $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ éleket, akkor az $e_{k+1} \in E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ válasszuk ki úgy, hogy a $(V, \{e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}\})$ gráfban ne legyen kör és $s(e_{k+1})$ legyen a lehető legkisebb. Azaz ha egy $f \in E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ éltre $(V, \{e_1, e_2, \dots, e_k, f\})$ -ben nincs kör akkor $s(e_{k+1}) \leq s(f)$

3. lépés

Ha $n=|V|$ akkor az $e_1, e_2, \dots, e_{n-1} \in E$ élek kiválasztása után megállunk.

Def (színezés)

$\Gamma = (V, E)$ egy gráf, egy $\lambda: V \rightarrow \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ függvényt színezésnek nevezzük (megengedett színezésnek), ha $i, j \in V$ és $\{i, j\} \in E$ esetén $\lambda(i) \neq \lambda(j)$.

Def (kromatikus szám)

Egy $\Gamma = (V, E)$ gráf kromatikus száma $k \geq 1$, ha Γ csúcsai kiszínezhetőek megengedett módon k színnel, de $k-1$ színnel ez már nem lehet.

Állítás. Egy $\Gamma = (V, E)$ nem üres gráf kromatikus száma pontosan 2, akkor ha Γ nem tartalmaz páratlan hosszúságú kört.

Def (párosítás)

Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban azt mondjuk, hogy az $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ élek párosítást alkotnak, ha ezek közül az élek közül bármely 2-nek nincs közös végpontja, azaz ha $1 \leq i \leq j \leq k$ esetén $e_i \cap e_j = \emptyset$ *üres halmaz*

Def (teljes párosítás)

A $\Gamma = (V, E)$ gráfban egy $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ párosítást teljesnek nevezünk, ha $e_1 \cup e_2 \cup \dots \cup e_k = E$.

Def (szomszédság)

Ha $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ egy kétrészes gráf és $X \subseteq V_1$ esetén $N_\Gamma(X) = \{i \in V_2 \mid \{i, j\} \in E \text{ valamilyen } j \in X \text{ csúcsra}\}$. N_Γ -t nevezzük az x szomszédságának.

Tétel (Kőning Hall)

Egy $\Gamma = (V_1 \cup V_2, E)$ kétrészes gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, ha $|V_1| = |V_2|$ és tetszőleges $X \subseteq V_1$ részalmazra $|X| \leq |N_\Gamma(X)|$.

Tétel (Tutte)

Egy tetszőleges $\Gamma = (V, E)$ összefüggő gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, ha $C_{\text{páratlan}}(\Gamma \setminus X) \leq |X|$ teljesül bármely $X \subseteq V$ részalmazra.

Def (Hamilton-kör)

A $\Gamma = (V, E)$ összefüggő gráfban Hamilton körnek nevezzük az olyan kört ami az összes csúcsot tartalmazza.

Tétel (Ore)

Legyen $\Gamma = (V, E)$ egy összefüggő gráf. Ha $d(i) + d(j) \geq |V|$ teljesül minden olyan $i, j \in V, i \neq j$ csúcsra amelyek nincsenek éllel összekötve, akkor Γ -ban létezik Hamilton kör.

Tétel (Dirac)

Ha egy $\Gamma = (V, E)$ összefüggő gráfban $d(i) \geq \frac{1}{2}|V|$ teljesül minden $i \in V$ esetén, akkor Γ -ban létezik Hamilton kör.

Tétel (Appel-Haken)

Ha $\Gamma = (V, E)$ síkba rajzolható akkor 4 színnel színezhető ki.

Tétel. Ha egy $\Gamma = (V, E)$ összefüggő gráfot síkba rajzolunk, akkor $l + c - é = 2$.

Állítás. Ha $\Gamma = (V, E)$ síkba rajzolható akkor $3l \leq 2é$

Állítás. Ha $\Gamma = (V, E)$ síkba rajzolható akkor $e \leq 3c - 6$

Állítás. Ha $\Gamma = (V, E)$ síkba rajzolható akkor

Tétel. $K_{3,3}$ nem síkba rajzolható.

Tétel. K_5 nem síkba rajzolható.

Tétel (Kuratowski)

Egy $\Gamma = (V, E)$ gráf pontosan akkor síkba rajzolható, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, amely $K_{3,3}$ -al vagy K_5 -el topologikusan izomorf.